



**HAL**  
open science

# Polynômes homogènes à plusieurs variables sur un corps fini $F_q$ qui s'annulent sur l'espace projectif $P_m(F_q)$

Dany-Jack Mercier, Robert Rolland

## ► To cite this version:

Dany-Jack Mercier, Robert Rolland. Polynômes homogènes à plusieurs variables sur un corps fini  $F_q$  qui s'annulent sur l'espace projectif  $P_m(F_q)$ . *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1998, 124, pp.227-240. <hal-00767463>

**HAL Id: hal-00767463**

**<https://univ-antilles.hal.science/hal-00767463v1>**

Submitted on 19 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Polynômes homogènes à plusieurs variables sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ qui s'annulent sur l'espace projectif $\mathbb{P}^m(\mathbb{F}_q)$

Dany-Jack Mercier & Robert Rolland

## Résumé

Nous étudions dans l'anneau  $\mathbb{F}_q[X_0, X_1, \dots, X_m]$  des polynômes à  $m + 1$  variables et à coefficients dans le corps fini à  $q$  éléments, l'idéal homogène  $\mathcal{J}$  engendré par les polynômes homogènes qui s'annulent sur tout l'espace. Cet idéal s'introduit naturellement lors de l'étude des codes de Reed-Muller projectifs ([7], [8]). Nous donnons une résolution libre du quotient  $\mathbb{F}_q[X_0, \dots, X_m]/\mathcal{J}$  en utilisant le complexe de Eagon et Northcott [4] qui généralise le complexe de Koszul [5]. Ceci permet en particulier de calculer directement les dimensions des composantes homogènes de l'idéal.

**Mots clés :** corps fini, polynôme homogène, résolution libre, complexe de Koszul.

## 1 Introduction - Notations.

Soit  $p$  un nombre premier,  $q = p^s$  et  $\mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q$  éléments. Soit  $m$  un entier  $\geq 1$ . Nous notons  $\mathcal{P}(q, m + 1)$  l'espace  $\mathbb{F}_q[X_0, X_1, \dots, X_m]$  des polynômes à  $m + 1$  variables et à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$ . Notons aussi  $\mathcal{H}(q, m + 1, d)$  le sous espace de  $\mathcal{P}(q, m + 1)$  constitué des polynômes homogènes de degré  $d$ .

La décomposition :

$$\mathcal{P}(q, m + 1) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{H}(q, m + 1, d)$$

fournit à  $\mathcal{P}(q, m + 1)$  une structure d'algèbre graduée.

Soit  $\mathcal{A}$  l'idéal de l'anneau  $\mathcal{P}(q, m + 1)$  constitué des polynômes qui s'annulent sur tout l'espace  $\mathbb{F}_q^{m+1}$ .

Il est bien connu que (cf. [6] théorème 1) :

**Lemme 1** *L'idéal  $\mathcal{A}$  est engendré par les polynômes  $X_i^q - X_i$  où  $0 \leq i \leq m$ .*

---

<sup>0</sup>[ccod0010] Journal of Pure and Applied Algebra 124, pp. 227-240, 1998.

D.-J. Mercier, Equipe Applications de l'Algèbre et de l'Arithmétique de l' Université des Antilles et de la Guyane, I.U.F.M., Morne Ferret, BP399, F97159 Pointe-à-Pitre CEDEX

R. Rolland, C.N.R.S. Laboratoire de Mathématiques Discrètes, Luminy Case 930, F13288 Marseille, mél: rolland@lmd.univ-mrs.fr CEDEX 9

et aussi que (cf. [6] lemme 1 ou [3] lemme 1.3) :

**Lemme 2** *Si  $f$  est un polynôme réduit (i.e. les degrés partiels de  $f$  sont tous  $\leq q - 1$ ) alors  $f$  s'annule sur tout  $\mathbb{F}_q^{m+1}$  si et seulement si  $f = 0$ .*

Que dire du problème analogue concernant les polynômes homogènes? Plus précisément soit  $\mathcal{J}_d$  le sous espace constitué des polynômes  $f \in \mathcal{H}(q, m + 1, d)$  tels que  $f(x) = 0$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{F}_q^{m+1}$ . Notons  $\mathcal{J}$  l'idéal homogène :

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}_d.$$

Peut-on donner une description simple de cet idéal ?

**Remarque** — Pour chaque  $d$  nous avons  $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{A}$  et donc  $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ .

## 2 Générateurs de l'idéal $\mathcal{J}$ .

Appelons  $\mathcal{I}$  l'idéal homogène de  $\mathcal{P}(q, m + 1)$  engendré par les polynômes  $X_i X_j^q - X_i^q X_j$  où  $0 \leq i < j \leq m$ . Ainsi :

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_d$$

où  $\mathcal{I}_d$  est l'espace des polynômes  $f$  tels que :

$$f(X_0, X_1, \dots, X_m) = \sum_{0 \leq i < j \leq m} (X_i^q X_j - X_i X_j^q) Q_{i,j}(X_0, X_1, \dots, X_m)$$

avec :

$$Q_{i,j} \in \mathcal{H}(q, m + 1, d - q - 1) \text{ si } d \geq q + 1$$

et :

$$Q_{i,j} = 0 \text{ si } d \leq q.$$

Dans [2] le lemme 7.2.4 page 38 énonce l'égalité des idéaux  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{I}$ . Nous donnons ici notre propre démonstration de ce résultat.

**Théorème 1** *Pour tout degré  $d \geq 0$  nous avons :*

$$\mathcal{J}_d = \mathcal{I}_d.$$

*En particulier si  $d \leq q$  alors  $\mathcal{J}_d = \{0\}$ .*

**Preuve** — Chaque élément du corps  $\mathbb{F}_q$  vérifie  $x^q = x$ . Il en découle que  $\mathcal{I}_d \subset \mathcal{J}_d$ . Il reste à prouver que  $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{I}_d$ . Examinons trois cas.

- Cas  $0 \leq d \leq q - 1$ . Un polynôme de  $\mathcal{J}_d$  est alors un polynôme réduit s'annulant sur  $\mathbb{F}_q^{m+1}$ . D'après le lemme 1.1, il est nul. Donc  $\mathcal{J}_d = \{0\}$ .
- Cas  $d = q$ .
- Cas  $d \geq q + 1$ .

Nous renvoyons la démonstration des deux derniers cas après les deux lemmes clés suivants. ■

Le lemme suivant est une amélioration du lemme 1.1.

**Lemme 3** *Si  $f$  est dans  $\mathcal{A}$ , nous avons :*

$$f(X_0, X_1, \dots, X_m) = \sum_{i=0}^m Q_i(X_0, X_1, \dots, X_m)(X_i^q - X_i)$$

où  $Q_i$  est un polynôme tel que  $\deg(Q_i) \leq \deg(f) - q$ .

**Preuve** — Soit  $f \in \mathcal{P}(q, m + 1)$ . Chaque monôme de  $f$  :

$$aX_0^{\alpha_0} \dots X_m^{\alpha_m}$$

tel que  $\alpha_0 \geq q$  peut être écrit :

$$\begin{aligned} aX_0^{\alpha_0} \dots X_m^{\alpha_m} &= a(X_0^{\alpha_0} - X_0^{\alpha_0 - q + 1})X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m} + aX_0^{\alpha_0 - q + 1}X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m} \\ &= aX_0^{\alpha_0 - q}X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}(X_0^q - X_0) + aX_0^{\alpha_0 - q + 1}X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}. \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\deg(aX_0^{\alpha_0 - q}X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}) \leq \deg(f) - q.$$

Maintenant si  $\alpha_0 - q + 1 \geq q$  nous itérons le procédé sur le terme :

$$aX_0^{\alpha_0 - q + 1}X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}$$

avec la même variable  $X_0$ , et ceci jusqu' à obtenir un exposant de  $X_0$  strictement inférieur à  $q$ . De telle sorte que :

$$aX_0^{\alpha_0} \dots X_m^{\alpha_m} = q_0(X_0, X_1, \dots, X_m)(X_0^q - X_0) + aX_0^{\beta_0}X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}$$

avec  $\deg(q_0) \leq \deg(f) - q$ . Nous recommençons alors avec la variable  $X_1$ , en partant du terme :

$$aX_0^{\beta_0}X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}.$$

Après traitement de toutes les variables nous obtenons en conclusion :

$$aX_0^{\alpha_0} \cdots X_m^{\alpha_m} = \sum_{i=0}^m q_i(X_0, X_1, \dots, X_m)(X_i^q - X_i) + aX_0^{\beta_0} X_1^{\beta_1} \cdots X_m^{\beta_m}$$

où  $\deg(q_i) \leq \deg(f) - q$  and  $\beta_i \leq q - 1$ . Par linéarité  $f$  peut être écrit :

$$f(X_0, X_1, \dots, X_m) = \sum_{i=0}^m Q_i(X_0, X_1, \dots, X_m)(X_i^q - X_i) + f^*(X_0, X_1, \dots, X_m)$$

où  $\deg(Q_i) \leq \deg(f) - q$  et où  $f^*$  est un polynôme réduit. Si  $f$  s'annule sur tout l'espace, il est clair que  $f^*$  en fait de même, et d'après le lemme 1.2  $f^* = 0$ . ■

**Lemme 4** *Supposons  $d \geq q + 1$ . Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{J}_d$  tel que  $X_m$  soit en facteur dans  $f$ . Alors  $f$  est dans  $\mathcal{I}_d$ .*

**Preuve** — Calculons dans le corps des fractions de  $\mathbb{F}_q(X_0, X_1, \dots, X_m)$ .

$$\begin{aligned} f(X_0, X_1, \dots, X_m) &= X_m^d f\left(\frac{X_0}{X_m}, \dots, \frac{X_{m-1}}{X_m}, 1\right) \\ &= X_m^d f(Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}, 1). \end{aligned}$$

Comme  $X_m$  apparaît dans chaque monôme de  $f$ , le polynôme à  $m$  variables  $f(Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}, 1)$  est de degré  $\leq d-1$ . De plus, puisque  $f(X_0, X_1, \dots, X_m)$  s'annule pour tout  $x \in \mathbb{F}_q^{m+1}$ , le polynôme  $f(Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}, 1)$  s'annule pour tout  $y \in \mathbb{F}_q^m$ . D'après le lemme 2.1 :

$$f(Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}, 1) = \sum_{i=0}^{m-1} Q_i(Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1})(Y_i^q - Y_i)$$

où :

$$d_i = \deg(Q_i) \leq \deg(f(Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}, 1)) - q \leq d - 1 - q$$

si bien que :

$$\begin{aligned} f(X_0, X_1, \dots, X_m) &= X_m^d \sum_{i=0}^{m-1} Q_i\left(\frac{X_0}{X_m}, \dots, \frac{X_{m-1}}{X_m}\right) \left( \left(\frac{X_i}{X_m}\right)^q - \frac{X_i}{X_m} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} Q_i\left(\frac{X_0}{X_m}, \dots, \frac{X_{m-1}}{X_m}\right) (X_i^q X_m^{d-q} - X_i X_m^{d-1}). \end{aligned}$$

Mais pour chaque  $i$  :

$$Q_i\left(\frac{X_0}{X_m}, \dots, \frac{X_{m-1}}{X_m}\right) = \frac{1}{X_m^{d_i}} L_i(X_0, X_1, \dots, X_m)$$

où  $L_i(X_0, X_1, \dots, X_m)$  est un polynôme homogène de degré  $d_i$ . Donc :

$$\begin{aligned} f(X_0, X_1, \dots, X_m) &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{X_m^{d_i}} L_i(X_0, X_1, \dots, X_m) X_m^{d-1-q} (X_i^q X_m - X_i X_m^q) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} X_m^{d-1-q-d_i} L_i(X_0, X_1, \dots, X_m) (X_i^q X_m - X_i X_m^q). \end{aligned}$$

Mais  $d-1-q-d_i \geq 0$ , donc  $f \in \mathcal{I}_d$ . ■

**Remarque** — En fait cette dernière expression obtenue pour  $f$  est plus précise que la conclusion du lemme 2.2.

**Fin de la démonstration du théorème 2.1:** Examinons d'abord le cas  $d = q$ . Si  $f$  est dans  $\mathcal{J}_d$ ,  $f$  est aussi dans  $\mathcal{A}$ . Par le lemme 2.1 nous savons que :

$$f(X_0, X_1, \dots, X_m) = \sum_{i=0}^m A_i (X_i^q - X_i).$$

où les  $A_i$  sont des polynômes constants. Il est facile de voir maintenant qu'une telle somme n'est homogène que si les  $A_i$  sont nuls. Donc  $f = 0$  et  $\mathcal{J}_d = \{0\}$ .

Traisons maintenant le cas  $d \geq q + 1$ .

La démonstration est faite par récurrence sur  $m$ .

- Si  $m = 1$ ,  $f(X_0, X_1)$  est un polynôme homogène à 2 variables et de degré  $d$  :

$$f(X_0, X_1) = a_d X_0^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X_0^i X_1^{d-i}.$$

Comme  $f$  s'annule sur tout l'espace,  $f(1, 0) = 0$  et donc  $a_d = 0$ .

Par suite  $f(X_0, X_1)$  satisfait aux hypothèses du lemme 2.2. On en déduit le résultat pour  $m = 1$ .

- Si  $m > 1$ , supposons le résultat vrai pour tout  $1 \leq k < m$ . Soit  $f(X_0, X_1, \dots, X_m)$  un polynôme de  $\mathcal{J}_d$ . Nous pouvons écrire :

$$f(X_0, X_1, \dots, X_m) = g(X_0, X_1, \dots, X_m) + h(X_0, X_1, \dots, X_{m-1})$$

où :

$$g(X_0, X_1, \dots, X_m) = \sum_{\substack{\alpha_0 + \dots + \alpha_m = d \\ \alpha_m \neq 0}} a_{\alpha_0 \dots \alpha_m} X_0^{\alpha_0} \dots X_m^{\alpha_m}$$

et :

$$h(X_0, X_1, \dots, X_{m-1}) = \sum_{\alpha_0 + \dots + \alpha_{m-1} = d} a_{\alpha_0 \dots \alpha_{m-1}} X_0^{\alpha_0} \dots X_{m-1}^{\alpha_{m-1}}.$$

Nous savons que :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = h(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = 0$$

pour tout  $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{F}_q^m$ . Par hypothèse de récurrence :

$$h(X_0, \dots, X_{m-1}) = \sum_{0 \leq i < j \leq m-1} q_{i,j}(X_0, \dots, X_{m-1})(X_i^q X_j - X_i X_j^q).$$

Comme  $f$  et  $h$  s'annulent sur tout l'espace,  $g$  en fait de même. Si bien que  $g$  satisfait aux hypothèses du lemme 2.2. Donc :

$$g(X_0, X_1, \dots, X_m) = \sum_{i=0}^{m-1} l_i(X_0, X_1, \dots, X_m)(X_i^q X_m - X_i X_m^q).$$

Les expressions obtenues pour  $g$  and  $h$  permettent de conclure. ■

Comme conséquence directe du théorème 2.1 nous avons évidemment

**Corollaire 1** *L'idéal homogène  $\mathcal{J}$  est engendré par les polynômes :*

$$X_i^q X_j - X_i X_j^q.$$

### 3 Résolution libre de $\mathcal{P}(q, m+1)/\mathcal{I}$ .

Soit  $A$  la matrice à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{P}(q, m+1)$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_m \\ X_0^q & X_1^q & \dots & X_m^q \end{pmatrix}.$$

Il est clair que l'idéal  $\mathcal{I}$  est l'idéal engendré par les déterminants d'ordre 2 extraits de la matrice  $A$ .

Calculons tout d'abord la **hauteur**  $ht(\mathcal{I})$  de l'idéal  $\mathcal{I}$ , dont nous aurons besoin par la suite.

**Lemme 5** *La hauteur  $ht(\mathcal{I})$  de l'idéal  $\mathcal{I}$  est  $m$ .*

**Preuve** — Notons  $\overline{\mathbb{F}}_q$  la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_q$ . Si on note  $V(\mathcal{I})$  la variété algébrique projective de l'espace projectif  $\mathbb{F}_q^m(\overline{\mathbb{F}}_q)$  de dimension  $m$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_q$  donnée par l'idéal  $\mathcal{I}$ , on a :

$$V(\mathcal{I}) = \mathbb{F}_q^m(\mathbb{F}_q).$$

Ainsi cette variété est formée d'un nombre fini de points et on obtient les idéaux premiers minimaux de  $\mathcal{I}$  en prenant les idéaux  $\mathcal{A}_P = I(\{P\})$  associés aux point  $P \in \mathbb{F}_q^m(\mathbb{F}_q)$ . Chacun de ces idéaux a pour hauteur  $m$  (pour le voir on peut par exemple se placer dans l'espace affine de dimension  $m + 1$  et travailler avec la variété conique associée à  $V(\mathcal{I})$ ; dans ce cadre les idéaux  $I(\{P\})$  définissent des variétés de dimension 1). Or on sait ([1], page 13, exemple 1.2.2) que  $ht(\mathcal{I}) = \min(ht(\mathcal{A}_P))$ , on en déduit le résultat. ■

**Remarque** — On rappelle que la **profondeur** d'un idéal  $A$  d'un anneau  $R$ , notée  $gr(A)$  est la longueur  $p$  maximale d'une suite  $a_1, a_2, \dots, a_p$  d'éléments de  $A$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq p$ ,  $a_i$  ne soit pas un diviseur de zéro dans  $R/(a_1, \dots, a_{i-1})R$ .

On sait que dans l'anneau de Cohen-Macaulay  $\mathcal{P}(q, m + 1)$ , la profondeur de tout idéal propre est égale à sa hauteur. Par suite :

$$gr(\mathcal{I}) = m.$$

Suivons alors la démarche de [4] pour déterminer une résolution libre de  $\mathcal{I}$ .

Soient  $Y_0, Y_1, \dots, Y_m$  des indéterminées et  $\mathcal{K}$  la  $\mathcal{P}(q, m + 1)$ -algèbre extérieure construite sur ces indéterminées. L'algèbre  $\mathcal{K}$  est graduée :

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{K}_d$$

où  $\mathcal{K}_d$  a pour base les produits :

$$Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge \dots \wedge Y_{i_d}$$

avec  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq m$ .

Nous pouvons alors associer à chacune des deux lignes de la matrice  $A$  une dérivation sur  $\mathcal{K}$  en posant :

$$\Delta_1(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge \dots \wedge Y_{i_d}) = \sum_{j=1}^d (-1)^{j+1} X_{i_j} Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_{i_j} \wedge \dots \wedge Y_{i_d}$$

et :

$$\Delta_2(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge \cdots \wedge Y_{i_d}) = \sum_{j=1}^d (-1)^{j+1} X_{i_j}^q Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge \cdots \widehat{Y}_{i_j} \cdots \wedge Y_{i_d}$$

où suivant la convention habituelle le chapeau sur une indéterminée signifie que celle-ci manque dans le produit.

Soit  $\mathcal{P}(q, m+1)[Z_1, Z_2]$  l'anneau des polynômes en deux variables et à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{P}(q, m+1)$ . Notons  $\mathcal{D}_d$  le  $\mathcal{P}(q, m+1)$ -module constitué des éléments de  $\mathcal{P}(q, m+1)[Z_1, Z_2]$  homogènes de degré  $d$ .

On définit alors pour tout  $0 \leq j \leq m-1$  le produit tensoriel :

$$\mathcal{N}_{j+1} = \mathcal{K}_{j+2} \otimes \mathcal{D}_j$$

et on pose :

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{P}(q, m+1).$$

On dispose alors pour tout  $1 \leq j \leq m$  de la dérivation  $d_j$ , homomorphisme de  $\mathcal{N}_j$  dans  $\mathcal{N}_{j-1}$ , définie pour  $j > 1$  par :

$$d_j(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge \cdots \wedge Y_{i_{j+1}} \otimes Z_1^\alpha Z_2^{j-1-\alpha}) = \Delta_1(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge \cdots \wedge Y_{i_{j+1}}) \otimes Z_1^{\alpha-1} Z_2^{j-1-\alpha} + \Delta_2(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge \cdots \wedge Y_{i_{j+1}}) \otimes Z_1^\alpha Z_2^{j-2-\alpha}$$

et pour  $j = 1$  par :

$$d_1(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \otimes 1) = X_{i_1} X_{i_2}^q - X_{i_1}^q X_{i_2}.$$

Nous obtenons alors le théorème suivant :

**Théorème 2** *La suite  $(\mathcal{N}_j)_{0 \leq j \leq m}$  est une résolution libre de l'idéal  $\mathcal{I}$  c'est-à-dire que la suite :*

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_m \rightarrow \mathcal{N}_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{P}(q, m+1)/\mathcal{I} \rightarrow 0$$

*est exacte (s est la surjection canonique de  $\mathcal{P}(q, m+1)$  sur  $\mathcal{P}(q, m+1)/\mathcal{I}$ ).*

**Preuve** — L'anneau  $\mathcal{P}(q, m+1)$  est Noetherien,  $\mathcal{I}$  en est un idéal propre défini par une matrice  $2 \times (m+1)$  et la profondeur de  $\mathcal{I}$  est  $(m+1) - 2 + 1 = m$  (cf. la remarque du lemme 3.1). En vertu du théorème 2 de [4] on en déduit le résultat. ■

## 4 Relations entre les polynômes $X_i X_j^q - X_i^q X_j$ .

Il s'agit de déterminer les familles de polynômes :

$$(Q_{i,j}(X_0, X_1, \dots, X_m))_{0 \leq i < j \leq m}$$

telles que :

$$\sum_{0 \leq i < j \leq m} Q_{i,j}(X_0, X_1, \dots, X_m)(X_i X_j^q - X_i^q X_j) = 0.$$

Une telle famille donne une **relation** entre les polynômes  $X_i X_j^q - X_i^q X_j$ . On notera  $\mathcal{R}_1$  l'ensemble de ces familles de polynômes.

**Théorème 3**  $\mathcal{R}_1$  est l'idéal de  $\bigoplus_{0 \leq i < j \leq m} \mathcal{P}(q, m+1)$  engendré par les éléments :

$$e_{i_1, i_2, i_3} = (Q_{i,j}(X_0, X_1, \dots, X_m))_{0 \leq i < j \leq m}$$

où  $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m$  et où :

$$\begin{aligned} Q_{i_1, i_2}(X_0, X_1, \dots, X_m) &= X_{i_3} & Q_{i_1, i_3}(X_0, X_1, \dots, X_m) &= -X_{i_2} \\ Q_{i_2, i_3}(X_0, X_1, \dots, X_m) &= X_{i_1} & Q_{i,j}(X_0, X_1, \dots, X_m) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

et les éléments :

$$f_{i_1, i_2, i_3} = (Q_{i,j}(X_0, X_1, \dots, X_m))_{0 \leq i < j \leq m}$$

où  $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m$  et où :

$$\begin{aligned} Q_{i_1, i_2}(X_0, X_1, \dots, X_m) &= X_{i_3}^q & Q_{i_1, i_3}(X_0, X_1, \dots, X_m) &= -X_{i_2}^q \\ Q_{i_2, i_3}(X_0, X_1, \dots, X_m) &= X_{i_1}^q & Q_{i,j}(X_0, X_1, \dots, X_m) &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

**Preuve** — On peut clairement identifier le  $\mathcal{P}(q, m+1)$ -module  $\mathcal{N}_1$  avec le module  $\bigoplus_{0 \leq i < j \leq m} \mathcal{P}(q, m+1)$  en identifiant  $Y_i \wedge Y_j \otimes 1$  avec l'élément dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice  $(i, j)$  qui vaut 1.

En revenant à la définition de  $d_1$ , on voit que  $\mathcal{R}_1 = \text{Ker}(d_1)$ . Mais on sait que le noyau de  $d_1$  est l'image de  $d_2$ . Il suffit alors de calculer l'image par  $d_2$  de la base constituée des éléments  $Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge Y_{i_3} \otimes Z_1$  et des éléments  $Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge Y_{i_3} \otimes Z_2$  de  $\mathcal{N}_2$  pour avoir un système de générateurs de l'idéal  $\mathcal{R}_1$ .

$$\begin{aligned} d_2(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge Y_{i_3} \otimes Z_1) &= \Delta_1(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge Y_{i_3}) \otimes 1 \\ &= X_{i_1} Y_{i_2} \wedge Y_{i_3} \otimes 1 - X_{i_2} Y_{i_1} \wedge Y_{i_3} \otimes 1 + X_{i_3} Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \otimes 1 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d_2(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge Y_{i_3} \otimes Z_2) &= \Delta_2(Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \wedge Y_{i_3}) \otimes 1 \\ &= X_{i_1}^q Y_{i_2} \wedge Y_{i_3} \otimes 1 - X_{i_2}^q Y_{i_1} \wedge Y_{i_3} \otimes 1 + X_{i_3}^q Y_{i_1} \wedge Y_{i_2} \otimes 1 \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat. ■

**Remarque** — Les vecteurs :

$$g_{i_1, i_2, i_3, i_4} = (0, \dots, 0, X_{i_1}^q X_{i_2} - X_{i_1} X_{i_2}^q, 0, \dots, 0, X_{i_3} X_{i_4}^q - X_{i_3}^q X_{i_4}, 0, \dots, 0),$$

où les deux composantes non nulles  $X_{i_1}^q X_{i_2} - X_{i_1} X_{i_2}^q$  et  $X_{i_3} X_{i_4}^q - X_{i_3}^q X_{i_4}$  sont respectivement aux places d'indices  $(i_3, i_4)$  et  $(i_1, i_2)$ , qui donnent clairement des relations, s'écrivent grâce aux générateurs indiqués sous la forme :

$$g_{i_1, i_2, i_3, i_4} = X_{i_4}^q e_{i_1, i_2, i_3} - X_{i_3}^q e_{i_1, i_2, i_4} + X_{i_2} f_{i_1, i_3, i_4} - X_{i_1} f_{i_2, i_3, i_4}.$$

## 5 Les dimensions.

### 5.1 Fonctions associées à des polynômes homogènes.

Suivons [7] pour associer à tout polynôme homogène une fonction définie sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^m(q)$ .

Notons  $\mathcal{F}(q, m)$  l'espace des fonctions définies sur  $\mathbb{P}^m(q)$  à valeurs dans  $\mathbb{F}_q$ .

Si  $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_m) \in \mathbb{F}_q^m(q)$ , soit :

$$k(x) = \max\{j | x_j \neq 0\}.$$

Définissons l'application  $T_d$  de  $\mathcal{H}(q, m+1, d)$  dans  $\mathcal{F}(q, m)$  par :

$$T_d(f)(x_0 : \dots : x_{k(x)} : 0 : \dots : 0) = \left(\frac{1}{x_{k(x)}}\right)^d f(x_0, \dots, x_{k(x)}, 0, \dots, 0).$$

$T_d$  est une application linéaire et :

$$\text{Ker}(T_d) = \mathcal{J}_d.$$

Notons  $C(q, m, d)$  le code de Reed Muller projectif d'ordre  $d$  sur  $\mathbb{F}_q$ , de longueur  $q^m + q^{m-1} + \dots + q + 1$  (cf. [7]) :

$$C(q, m, d) = T_d(\mathcal{H}(q, m+1, d))$$

si bien que :

$$\dim(\text{Ker}(T_d)) = \dim(\mathcal{H}(q, m+1, d)) - \dim(C(q, m, d))$$

La dimension de l'espace  $\mathcal{H}(q, m + 1, d)$  est (cf. [7]) :

$$\dim(\mathcal{H}(q, m + 1, d)) = \binom{m + d}{d}$$

et la dimension de  $C(q, m, d)$  est (cf. [8]) :

$$\dim(C(q, m, d)) = \sum_{\substack{t=d \pmod{q-1} \\ 0 < t \leq d}} \left( \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \binom{t - jq + m}{t - jq} \right)$$

où le coefficient binomial  $\binom{t - jq + m}{t - jq}$  est zero si  $t - jq < 0$ . En conclusion nous avons :

**Théorème 4** *La dimension de l'espace  $\mathcal{J}_d$  est donnée par :*

$$\dim(\mathcal{J}_d) = \binom{m + d}{d} - \sum_{\substack{t=d \pmod{q-1} \\ 0 < t \leq d}} \left( \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \binom{t - jq + m}{t - jq} \right).$$

**Remarque** — L'application qui à  $d$  fait correspondre  $\dim(C(q, m, d))$  (dimension de la composante homogène de degré  $d$  du quotient  $\mathcal{P}(q, m + 1)/\mathcal{J}$ ) est la fonction de Hilbert de la variété  $\mathbb{F}_q^m(q)$ .

**Remarque** — Calculons la dimension de  $\mathcal{J}_d$  dans quelques cas particuliers.

- si  $d \leq q$  on sait d'après le théorème 2.1 que :

$$\dim(\mathcal{J}_d) = 0$$

- Si  $d = q + 1$  on peut calculer la dimension en utilisant le théorème 5.1 (qui n'utilise pas le fait que  $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ ) ou en remarquant que les polynômes  $X_i^q X_j - X_i X_j^q$  (avec  $0 \leq i < j \leq m$ ) sont indépendants, si bien que :

$$\dim(\mathcal{J}_d) = \frac{m(m+1)}{2}$$

- Si  $d \geq m(q-1) + 1$ , on sait que (cf. [8])  $C(q, m, d)$  l'espace  $\mathcal{F}(q, m)$  tout entier, dont la dimension est  $p_m = q^m + q^{m-1} + \dots + q + 1$ . Donc :

$$\dim(\mathcal{J}_d) = \binom{m + d}{d} - (q^m + q^{m-1} + \dots + q + 1)$$

## 5.2 Calcul de la dimension utilisant la résolution libre.

**Théorème 5** *La dimension de l'espace  $\mathcal{I}_d$  (composante homogène de degré  $d$  de l'idéal homogène engendré par les polynômes  $X_i X_j^q - X_i^q X_j$ ) est :*

$$\dim(\mathcal{I}_d) = \sum_{j=2}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \binom{d + (\alpha+1)(q-1) - jq + m}{d + (\alpha+1)(q-1) - jq}.$$

**Preuve** — Remarquons que nous pouvons écrire :

$$\mathcal{N}_{j-1} = \bigoplus_{\substack{0 \leq i_1 < \dots < i_j \leq m \\ 0 \leq \alpha \leq j-2}} \mathcal{P}(q, m+1)$$

en identifiant, par une démarche analogue à celle déjà faite au paragraphe 3, l'élément de base  $Y_{i_1} \wedge \dots \wedge Y_{i_j} \otimes Z_1^\alpha Z_2^{j-2-\alpha}$  de  $\mathcal{N}_{j-1}$  avec l'élément de  $\bigoplus_{\substack{0 \leq i_1 < \dots < i_j \leq m \\ 0 \leq \alpha \leq j-2}} \mathcal{P}(q, m+1)$  dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice  $(i_1, i_2, \dots, i_j, \alpha)$  qui vaut 1.

Posons :

$$(\mathcal{N}_0)_d = \mathcal{H}(q, m+1, d),$$

et pour  $j \geq 2$  :

$$(\mathcal{N}_{j-1})_d = \bigoplus_{\substack{0 \leq i_1 < \dots < i_j \leq m \\ 0 \leq \alpha \leq j-2}} \mathcal{H}(q, m+1, d - (q+1) - \alpha - q(j-2-\alpha)).$$

Il est aisé de vérifier que la restriction de  $d_j$  à  $(\mathcal{N}_j)_d$  a son image dans  $(\mathcal{N}_{j-1})_d$  et que la suite :

$$0 \rightarrow (\mathcal{N}_m)_d \rightarrow (\mathcal{N}_{m-1})_d \rightarrow \dots \rightarrow (\mathcal{N}_1)_d \rightarrow (\mathcal{N}_0)_d \rightarrow \mathcal{H}(q, m+1, d)/\mathcal{I}_d \rightarrow 0$$

est exacte. Donc :

$$\dim(\mathcal{I}_d) = \dim(\text{Ker}(s)) = \dim(\text{Im}(d_1)).$$

En tenant compte du fait que :

$$\dim(\text{Im}(d_k)) = \dim((\mathcal{N}_k)_d) - \dim(\text{Ker}(d_k))$$

et que :

$$\dim(\text{Ker}(d_k)) = \dim(\text{Im}(d_{k+1}))$$

on établit la formule :

$$\dim(\mathcal{I}_d) = \sum_{j=2}^{m+1} (-1)^j \dim((\mathcal{N}_{j-1})_d)$$

qui compte tenu de la définition de  $(\mathcal{N}_{j-1})_d$  et de la formule :

$$\dim(\mathcal{H}(q, m+1, k)) = \binom{m+k}{k}$$

donne le résultat attendu. ■

**Remarque** — Puisqu'on sait que l'idéal  $\mathcal{I}$  coïncide avec l'idéal  $\mathcal{J}$  on obtient l'égalité combinatoire :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \sum_{\alpha=0}^{j-2} \binom{d + (\alpha+1)(q-1) - jq + m}{d + (\alpha+1)(q-1) - jq} \\ &= \binom{m+d}{d} - \sum_{\substack{t=d \pmod{q-1} \\ 0 < t \leq d}} \left( \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \binom{t - jq + m}{t - jq} \right) \end{aligned}$$

En fait les deux formules donnant  $\dim(\mathcal{I}_d)$  et  $\dim(\mathcal{J}_d)$  ont été obtenues indépendamment du fait que  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ , si bien que si l'on démontre directement l'égalité combinatoire précédente, puisqu'on sait par ailleurs de façon simple que  $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ , on obtient une autre démonstration du théorème 2.1.

**Exemple** — Donnons quelques valeurs numériques pour la dimension commune  $\dim(\mathcal{I}_d) = \dim(\mathcal{J}_d)$

$q = 3$	$m = 2$	$d = 4$	$\dim = 3$
$q = 3$	$m = 2$	$d = 7$	$\dim = 23$
$q = 3$	$m = 2$	$d = 9$	$\dim = 42$
$q = 3$	$m = 2$	$d = 10$	$\dim = 53$
$q = 3$	$m = 5$	$d = 4$	$\dim = 15$
$q = 3$	$m = 5$	$d = 7$	$\dim = 484$
$q = 3$	$m = 5$	$d = 9$	$\dim = 1644$
$q = 3$	$m = 5$	$d = 10$	$\dim = 2640$
$q = 4$	$m = 2$	$d = 4$	$\dim = 0$
$q = 4$	$m = 2$	$d = 7$	$\dim = 15$
$q = 4$	$m = 2$	$d = 9$	$\dim = 34$
$q = 4$	$m = 2$	$d = 10$	$\dim = 45$
$q = 4$	$m = 5$	$d = 4$	$\dim = 0$
$q = 4$	$m = 5$	$d = 7$	$\dim = 210$
$q = 4$	$m = 5$	$d = 9$	$\dim = 1030$
$q = 4$	$m = 5$	$d = 10$	$\dim = 1875$

## References

- [1] Balcerzyk S. & Józefiak T., Commutative Rings, Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications, 1989.
- [2] Bayer-Fluckiger E. & Serre J-P., Torsions quadratiques et bases normales autoduales, Amer. J. Math. 116, pp1-64, 1994.
- [3] Delsarte P., Goethals J.M. & Mac Williams F.J., On Generalized Reed-Muller Codes and their Relatives, Inform. and Control 16, pp403-442, 1970.
- [4] Eagon J.A. & Northcott D.G., Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 269, pp188-204, 1962.
- [5] Harris J., Algebraic Geometry. A First Course, Springer GTM 133, 1992.
- [6] Joly J.R., Equations et variétés algébriques sur un corps fini, Enseignement Math. 19, pp1-117, 1973.
- [7] Lachaud G., The parameters of Projective Reed-Muller Codes, Discrete Math. 81 pp217-221, 1990.
- [8] Sørensen A.B., Projective Reed-Muller Codes, IEEE Trans. Inform. Theory 37, 1991.